

CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
Soluzioni degli esercizi della prova scritta del 7 gennaio 2004

Studio di funzione:

Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x}e^{x^2} & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) tangenti destra e sinistra in $x = 1$; (h) punti di non derivabilità.

Svolgimento:

Chiamiamo per comodità $f_1(x) = \sqrt{x}e^{x^2}$ e $f_2(x) = x^2 + 2x + 1$. Osserviamo che conosciamo il grafico di f_2 , dunque l'esercizio si riduce allo studio di f_1 nell'intervallo $(-\infty, 1]$.

- (a) f_1 contiene $\sqrt{x}$, che è definita solo per $x \geq 0$, dunque $CE = [0, +\infty)$, $CE' = [0, +\infty]$.
- (b) Poiché f_1 e f_2 sono funzioni continue nei loro campi di esistenza, f è sicuramente continua in $C = [0, 1) \cup (1, +\infty)$. Per la derivabilità, osserviamo che $\sqrt{x}$ non è derivabile in 0 (il grafico di $\sqrt{x}$ ha tangente verticale in 0), dunque f è sicuramente derivabile in $D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
- (c) Eventuali discontinuità vanno studiate in $CE - C = \{1\}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x}e^{x^2} = e \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2x + 1 = 4 \end{aligned}$$

Poiché i limiti destro e sinistro di f non coincidono, f non è continua in 1.

- (d) I limiti vanno calcolati in $CE' - C = \{1, +\infty\}$. Il limite in 1 è già stato svolto, mentre quello in $+\infty$ è noto.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

- (e) Visti i limiti calcolati al punto precedente, deduciamo che:

- non ci sono asintoti verticali;
- non ci sono asintoti orizzontali;
- non ci sono asintoti obliqui (le parabole non hanno asintoto obliquo verso $+\infty$).

- (f) La monotonia è data dal segno della derivata prima.

$$f'(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x^2} + 2x\sqrt{x}e^{x^2} & \text{se } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}) & \text{se } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Tutti i fattori sono evidentemente positivi per $x \geq 0$, dunque f è strettamente crescente.

- (g) I coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra in 1 sono dati rispettivamente dai limiti destro e sinistro di f' in 1:

$$\begin{aligned} m^- &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}) = \frac{5}{2}e \\ m^+ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 2 = 4 \end{aligned}$$

La tangente sinistra passa per il punto $(1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)) = (1, e)$, la tangente destra passa per il punto $(1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (1, 4)$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{tangente sinistra: } y - e &= m^-(x - 1) \Rightarrow y = \frac{5}{2}ex - \frac{3}{2}e; \\ \text{tangente destra: } y - 4 &= m^+(x - 1) \Rightarrow y = 4x. \end{aligned}$$

- (h) Eventuali punti di non derivabilità vanno cercati in $CE - D = \{0, 1\}$. Poiché f non è continua in 1, f non è derivabile in 1. Per quanto riguarda 0, possiamo parlare solo di derivabilità destra, e la studiamo facendo il limite seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x^2}(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}) = +\infty$$

Poiché il limite non viene finito, f non è derivabile in 0 (la sua tangente in 0 è verticale).

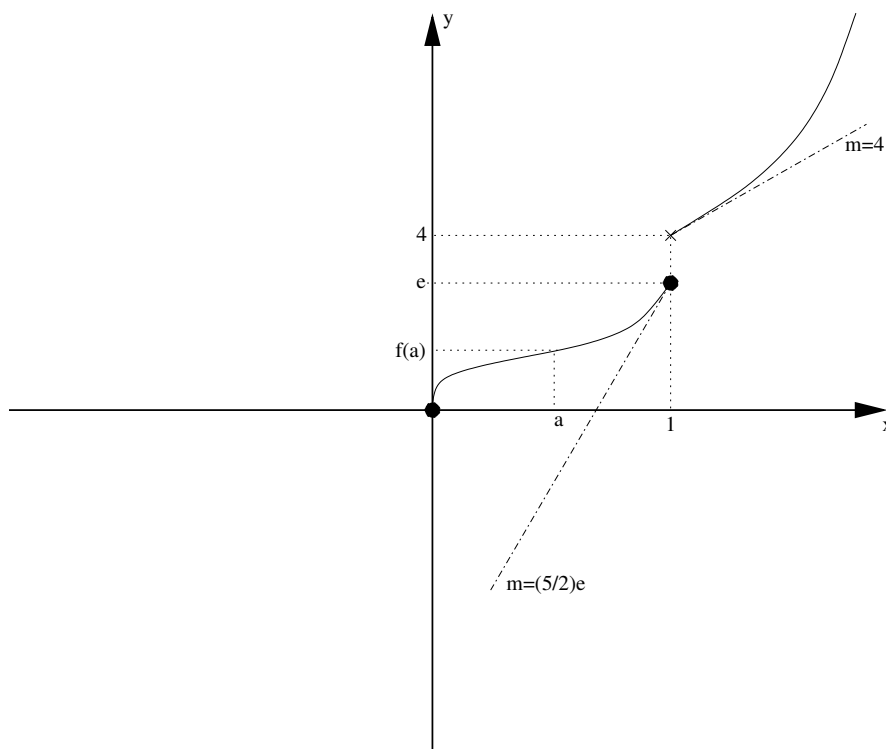


Figura 1: Grafico di f . Notare che da 1 in poi il grafico è quello di una parabola con vertice in $(-1, 0)$ e concavità verso l'alto. Il punto di partenza sull'asse y è dato da $f(0) = 0$. $(a, f(a))$ è il punto di flesso.

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di f (figura 1). Notare che il grafico è ottenuto per incollamento dei grafici di f_1 e f_2 , e abbiamo sfruttato dove possibile la conoscenza del grafico di f_2 .

Infine, osserviamo che se non si calcola la derivata seconda non si ha alcuna garanzia che la concavità per $x < 1$ sia come in figura 1: essendo la tangente in 0 verticale, si parte obbligatoriamente con concavità verso il basso, ma nulla vieta l'esistenza di flessi in $(0, 1)$. Lo studio (facoltativo e non banale) della derivata seconda dà esattamente un flesso a nell'intervallo $(0, 1)$.

Studio di grafico di funzione:

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 2; (l) punti di non derivabilità; (m) punti di flesso.

Svolgimento:

- (a) $CE = [0, +\infty)$, $CE' = [0, +\infty]$.
- (b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x , cioè $\{0\}$.
- (c) L'intersezione con l'asse x e con l'asse y è il punto $(0, 0)$.
- (d) Il segno è evidentemente sempre positivo, tranne in 0 dove f si annulla.
- (e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione ha una discontinuità per $x = 2$.
- (f) i limiti non banali sono quelli in $(CE' - CE) \cup \{2\} = \{2, +\infty\}$. Passeggiando sul grafico e guardando l'asse y durante la passeggiata, otteniamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty\end{aligned}$$

- (g) Non ci sono asintoti.
- (h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioè i punti in cui la derivata è zero). Non ci sono punti critici.

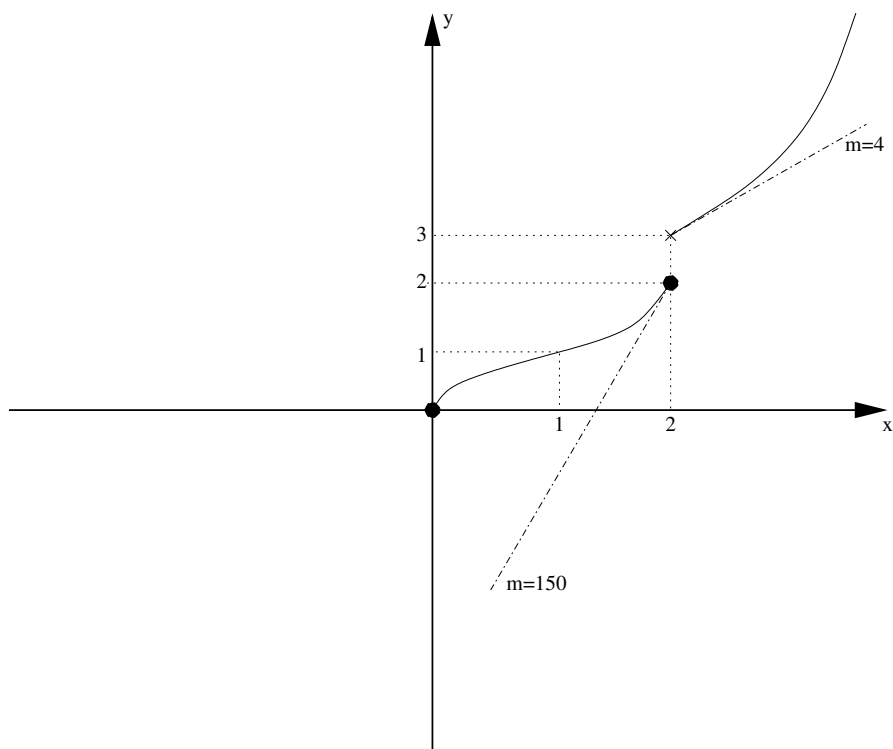


Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

- (i) La funzione è evidentemente monotona crescente.
- (j) Essendo la funzione illimitata superiormente, non si ha massimo globale. Il punto $(0,0)$ è il minimo globale, e quindi anche un minimo locale. Non ci sono massimi locali, perché f è monotona crescente.
- (k) La tangente sinistra è $y - 2 = 150(x - 2)$, la tangente destra è $y - 3 = 4(x - 2)$.
- (l) Per $x = 2$ la funzione è discontinua, e questo implica la non derivabilità in $x = 2$.
- (m) I flessi sono i punti in cui la concavità cambia verso, nel nostro caso il punto di coordinate $(1,1)$.

Massimi e minimi:

Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(-1, 1]$ della seguente funzione:

$$f(x) := \sqrt{x^2}$$

Svolgimento:

Basta osservare che $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ e usare la conoscenza dei grafici elementari, per ottenere un minimo globale (e locale) in $(0,0)$ e un massimo globale (e locale) in $(1,1)$.

Zeri:

Stabilire se $f(x) := x^3 + 2x^2 - x - 1$ ammette degli zeri su $(-1, 1)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

Svolgimento:

Studio sommario di f nell'intervallo $(-1, 1)$. Poiché $f(-1) = f(1) = 1 > 0$ e $f(0) = -1 < 0$, $f(x)$ ha sicuramente almeno due zeri in $(-1, 1)$ (vedi figura 3a), ed essendo di terzo grado non può averne più di tre. Ma avere esattamente tre zeri implicherebbe l'esistenza di tre punti critici (vedi figura 3b), cosa impossibile perché f' è di secondo grado. Dunque esistono esattamente due zeri x_1 e x_2 in $(-1, 1)$, con $x_1 \in (-1, 0)$ e $x_2 \in (0, 1)$.

Punti fissi:

Stabilire se la curva $f(x) := x^3 + 2x^2 - 1$ e la retta $y = x$ si intersecano nell'intervallo $(-1, 1)$. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := x^3 + 2x^2 - 1$ nell'intervallo $(-1, 1)$.

Svolgimento:

Il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = x^3 + 2x^2 - 1 - x$ nell'intervallo $(-1, 1)$, che è esattamente l'esercizio precedente. I punti fissi di f sono le intersezioni con la retta $y = x$, quindi anche questo quesito è equivalente all'esercizio precedente.

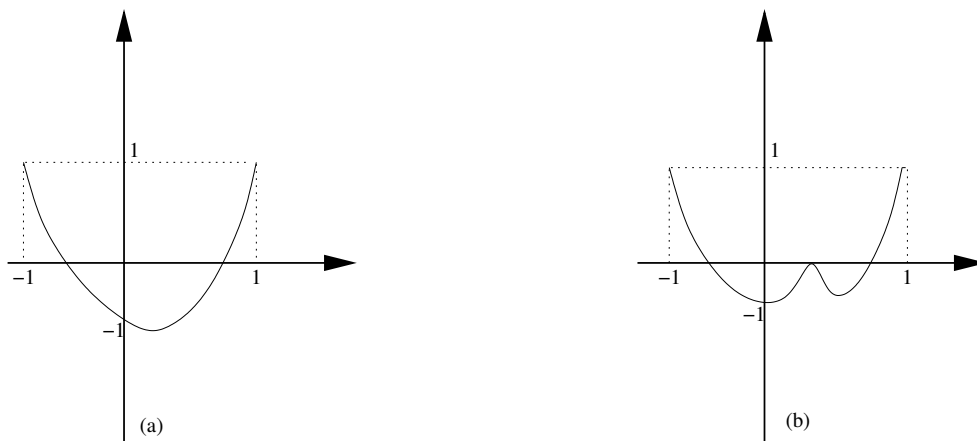


Figura 3: Nel caso (a) abbiamo un solo punto critico, mentre in (b) abbiamo tre punti critici (impossibile, perché f' è di secondo grado).

Teorico:

Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{x^6 + 1}$ assume il valore 1 nell'intervallo $[0, \sqrt[6]{e^2 - 1}]$ (giustificare la risposta).

Svolgimento:

f è continua perché composizione di funzioni continue (notare che $x^6 + 1$ è positivo). Inoltre $f(0) = 0$ e $f(\sqrt[6]{e^2 - 1}) = 2$, e l'asserto segue dal teorema dei valori intermedi.